ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 140 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-318-327
УДК 51-76, 517.988

О существовании и устойчивости решений типа «кольцо» уравнений нейронного поля Амари с периодической микроструктурой и функцией активации Хевисайда

Рашид АТМАНИЯ[1] , **Евгений Олегович БУРЛАКОВ**[1,2] ,
Иван Николаевич МАЛЬКОВ[1]

[1] ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»
625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6

[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В работе изучены существование и устойчивость решений типа «кольцо» двумерного уравнения нейронного поля Амари с периодической микроструктурой и функцией активации типа Хевисайда. Получены результаты, отражающие зависимость внутреннего и внешнего радиусов колец от порога активации нейронной среды и степени ее неоднородности. Сформулированы необходимое условие существования и достаточное условие отсутствия радиально распространяющихся из эпицентра бегущих волн, как в однородной нейронной среде, так и при слабо выраженной микроструктуре нейронной среды. Результаты исследования проиллюстрированы примером, основанном на выборе одной из типично используемых в математической нейробиологии функций межнейронной связи.

Ключевые слова: математическая нейробиология, уравнения нейронных полей с микроструктурой, двумерное уравнение нейронного поля, решение типа «кольцо», существование решений, устойчивость решений, радиальные бегущие волны

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00756).

Для цитирования: *Атмания Р., Бурлаков Е.О., Мальков И.Н.* О существовании и устойчивости решений типа «кольцо» уравнений нейронного поля Амари с периодической микроструктурой и функцией активации Хевисайда // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 318–327. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-318-327.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-318-327

On existence and stability of ring solutions to Amari neural field equation with periodic microstructure and Heaviside activation function

Rachid ATMANIA[1] , **Evgenii O. BURLAKOV**[1,2] , **Ivan N. MALKOV**[1]
[1] Tyumen State University
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. In the present research, existence and stability of ring solutions to two-dimensional Amari neural field equation with periodic microstructure and Heaviside activation function are studied. Results on dependence of the inner and the outer radii of the ring solutions are obtained. Necessary conditions for existence and sufficient conditions for non-existence of radial travelling waves are formulated for homogeneous neural medium and neural media with mild periodic microstructure. Theoretical results obtained are illustrated with a concrete example based on a connectivity function commonly used in the neuroscience community.

Keywords: mathematical neuroscience, neural field models with microstructure, two-dimensional neural field equation, ring solution, existence of solutions, stability of solutions, radial travelling waves

Acknowledgements: The work supported by the Russian Science Foundation (project no 22-21-00756).

Mathematics Subject Classification: 92B99, 35B27, 35B35.

For citation: Atmania R., Burlakov E.O., Malkov I.N. O sushchestvovanii i ustoychivosti resheniy tipa «kol'tso» uravneniy neyronnogo polya Amari s periodicheskoy mikrostrukturoy i funktsiyey aktivatsii Khevisayda [On existence and stability of ring solutions to Amari neural field equation with periodic microstructure and Heaviside activation function]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 318–327. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-318-327. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Исследование стационарных решений уравнений нейронных полей широко представлены в работах в области математической нейробиологии (см., например, обзоры [1, 2]). Наибольшее внимание уделяется стационарным пространственно локализованным решениям одномерных моделей нейронного поля. В работе [3] были впервые получены условия существования стационарных пространственно локализованных симметричных решений одномерной версии наиболее известной модели нейронного поля Амари — так называемых «бампов». При этом предполагалось, что активация нейронной среды описывается функцией Хевисайда, т. е. переход нейронов из состояния покоя в состояние активности и обратно происходит мгновенно. В последующих исследованиях были изучены устойчивость (одиночных) «бампов» [4], существование и устойчивость двойных симметричных «бампов» [5], а также периодических решений одномерного уравнения Амари [6]. Для двумерного уравнения Амари существование и устойчивость радиально симметричных «бампов» и «колец» изучены в работах [7] и [8], соответственно.

В работе [9] предложена модификация классического уравнения Амари, учитывающая наличие периодической микроструктуры нейронной среды, в форме усредненного уравнения нейронного поля, содержащего локальную переменную микроструктуры. Существование и устойчивость одиночных и двойных симметричных «бампов», не зависящих от переменной микроструктуры, в рамках одномерной усредненной модели Амари исследованы в работах [9] и [10], соответственно. Условия существования и устойчивости радиально симметричных решений-бампов двумерного усредненного уравнения Амари получены в [11]. Цель настоящей работы состоит в изучении существования и устойчивости стационарных не зависящих от переменной микроструктуры решений типа «кольцо» двумерного уравнения Амари с периодической микроструктурой и функцией активации типа Хевисайда [11]:

$$\partial_t u(t,x,x_f) = -u(t,x,x_f) + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathcal{Y}} \omega(|x-y|, x_f - y_f, \gamma) H(u(t,x_f,y_f)) dy_f dy, \tag{0.1}$$

где t — переменная времени, $x \in \mathbb{R}^2$ — глобальная пространственная переменная, x_f — локальная переменная, заданная на единичном двумерном торе $\mathcal{Y}$; величина $u(t,x,x_f)$ отвечает значению трансмембранного потенциала, функции H и ω определяют состояние покоя/активности нейрона и силу связи между нейронами (с учетом микроструктуры, формализуемой параметром неоднородности $\gamma \in \Gamma$, где $\Gamma \ni 0$ — некоторое множество допустимых значений параметра микроструктуры), соответственно.

1. Основные результаты

Приведем стандартные предположения относительно содержащихся в уравнении (0.1) функций (см., например, работы [9, 10, 11], [12]). Относительно функции ω, формализующей силу связи между нейронами в зависимости от их позиций в нейронной среде с микроструктурой, предполагаются непрерывность и суммируемость на неотрицательной полуоси по первому аргументу, непрерывность на элементе $\mathcal{Y}$ микроструктуры по второму аргументу и непрерывность в нуле по третьему аргументу при каждом значении первого аргумента, равностепенная относительно второго аргумента. Функция активации нейронов H, определяющая переход между состояниями покоя/активности нейронов, представляет собой функцию Хевисайда с положительным пороговым значением h.

В работе [12] было дано следующее определено решения типа «бамп» усредненного уравнения нейронного поля (0.1).

О п р е д е л е н и е 1.1. Зафиксируем $h > 0$, $a > 0$, $\gamma \in \Gamma$. *Решением типа «бамп»* (бампом, решением-бампом) радиуса a уравнения (0.1) нейронного поля с уровнем неоднородности γ и порогом активации нейронов h назовем непрерывную функцию u_a, удовлетворяющую уравнению (0.1) и обладающую следующими свойствами:

- $u_a(t, x, x_f) \equiv U_a(r)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$, $x = r\exp(i\alpha)$, $x = (r, \alpha)$, $r \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $x_f \in \mathcal{Y}$;
- $U_a(r) = h$ при $r = a$;
- $U_a(r) > h$ для всех $x < a$ и $U_a(x) < h$ при всех $x > a$.

Авторами [11] получено следующее необходимое условие существования бампа радиуса $a > 0$ в нейронном поле, формализуемом уравнением (0.1):

$$U_a(a) = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \widehat{\langle \omega \rangle}(|a - y|, \gamma)\rho d\rho d\theta = h,$$

где $\langle \omega \rangle$ — среднее значение функции связи ω по второму аргументу на периоде $\mathcal{Y}$, $\widehat{\langle \omega \rangle}(\cdot, \gamma)$ — преобразование Ханкеля функции $\langle \omega \rangle(\cdot, \gamma)$ при каждом $\gamma \in \Gamma$.

При этом само решение-бамп имеет вид

$$U_a(r) = 2\pi a \int\limits_0^{\infty} \langle \widehat{\omega} \rangle(\rho, \gamma) J_0(r\rho) J_1(a\rho) d\rho,$$

где J_k — функции Бесселя первого рода порядка k ($k = 0, 1$).

Решение типа «кольцо» (решение-кольцо, кольцевое решение) $W_{a,b}$ внешнего радиуса b и внутреннего радиуса a уравнения (0.1) нейронного поля с уровнем неоднородности γ и порогом активации нейронов h будем определять как разность двух бампов радиусов b и a ($a < b$):

$$W_{a,b}(r) = U_b(r) - U_a(r).$$

Необходимые условия существования кольцевого решения $W_{a,b}$ внешнего радиуса b и внутреннего радиуса a уравнения (0.1) естественным образом записываются в виде $W_{a,b}(a) = W_{a,b}(b) = h$, при этом само решение-кольцо имеет вид

$$W_{a,b}(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \widehat{\langle \omega \rangle}(\rho, \gamma) J_0(r\rho)\Big(bJ_1(b\rho) - aJ_1(a\rho)\Big) d\rho.$$

Следуя идеям работ [10] и [13], исследуем устойчивость стационарного решения $W_{a,b}$ в первом приближении. Линеаризация (0.1) в окрестности $W_{a,b}$ имеет вид

$$\partial_t v(t, x, x_f) = -v(t, x, x_f) + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{Y}} \omega(|x - y|, x_f - y_f, \gamma) H'(W_{a,b}(r')) v(t, x_f, y_f) dy_f dy.$$

Представляя возмущение в виде $v(t, x, x_f) = \varphi(x, x_f)\exp(\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, получаем

$$(1 + \lambda)\varphi(x, x_f) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{Y}} \omega(|x - y|, x_f - y_f, \gamma) H'(W_{a,b}(r'))\varphi(x_f, y_f) dy_f dy. \qquad (1.1)$$

Здесь λ определяет скорость роста/убывания возмущения $v(t,x,x_f)$ стационарного решения типа «кольцо» $W_{a,b}(x)$.

Далее, используя формальное выражение для производной функции Хевисайда

$$H'(W_{a,b}(r)) = \delta(W_{a,b}(r)) = \frac{\delta(r-a)}{|W'_{a,b}(a)|} + \frac{\delta(r-b)}{|W'_{a,b}(b)|},$$

где δ — дельта-функция Дирака, мы получаем следующий результат

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} \omega(|x-y|, x_f - y_f, \gamma) H'(W_{a,b}(r_f))\varphi(x_f, y_f) dy \\ &= \frac{a}{|W'_{a,b}(a)|} \int_0^{2\pi} \omega\left(\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos(\theta-\theta_f)}, x_f - y_f, \gamma\right) \varphi(a, \theta_f, y_f) d\theta_f \\ &+ \frac{b}{|W'_{a,b}(b)|} \int_0^{2\pi} \omega\left(\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos(\theta-\theta_f)}, x_f - y_f, \gamma\right) \varphi(b, \theta_f, y_f) d\theta_f.\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned}&(1+\lambda)\varphi(r,\theta,x_f) \\ &= \frac{a}{|W'_{a,b}(a)|} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{Y}} \omega\left(\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos(\theta-\theta_f)}, x_f - y_f, \gamma\right) \varphi(a, \theta_f, y_f) dy_f d\theta_f \\ &+ \frac{b}{|W'_{a,b}(b)|} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{Y}} \omega\left(\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos(\theta-\theta_f)}, x_f - y_f, \gamma\right) \varphi(b, \theta_f, y_f) dy_f d\theta_f.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Следуя идеям работ [8, 10], положим в (1.2) $r = a$, $r = b$, $\varphi(r,\theta,x_f) = \varphi_l(r,x_f)\exp(il\theta)$, $l \in \mathbb{Z}$, получая следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}&(1+\lambda)\varphi_l(a,x_f) \\ &= \frac{a}{|W'_{a,b}(a)|} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{Y}} \omega\left(\sqrt{2a^2-2a^2\cos(\phi)}, x_f - y_f, \gamma)\right) \varphi_l(a, y_f)\cos(l\phi) dy_f d\phi, \\ &+ \frac{b}{|W'_{a,b}(b)|} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{Y}} \omega\left(\sqrt{a^2+b^2-2ba\cos(\phi)}, x_f - y_f, \gamma\right) \varphi_l(b, y_f)\cos(l\phi) dy_f d\phi, \\ &(1+\lambda)\varphi_l(b,x_f) \\ &= \frac{a}{|W'_{a,b}(a)|} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{Y}} \omega\left(\sqrt{b^2+a^2-2ba\cos(\phi)}, x_f - y_f, \gamma\right) \varphi_l(a, y_f)\cos(l\phi) dy_f d\phi, \\ &+ \frac{b}{|W'_{a,b}(b)|} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{Y}} \omega\left(\sqrt{2b^2-2b^2\cos(\phi)}, x_f - y_f, \gamma\right) \varphi_l(b, y_f)\cos(l\phi) dy_f d\phi,\end{aligned} \tag{1.3}$$

где a и b $(a < b)$ удовлетворяют уравнению $W_{a,b}(a,x_f) = W_{a,b}(b,x_f) = h$. Система уравнений (1.3) может быть представлена в виде задачи отыскания собственных значений μ^γ

$$\mu^\gamma \Phi_l = \mathcal{W}_l^\gamma \Phi_l,$$

$$\Phi_l(x_f) = \begin{pmatrix} \varphi_l(a,x_f) \\ \varphi_l(b,x_f) \end{pmatrix},$$

$$\mu^\gamma = \mu^\gamma(x_f) = (\lambda^\gamma(x_f)+1)|W'_{a,b}(a)||W'_{a,b}(b)|$$

оператора $\mathcal{W}_l^\gamma$, заданного в пространстве квадратично суммируемых функций и определяемого равенством

$$\mathcal{W}_l^\gamma(x_f) = \begin{pmatrix} (\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{11} & (\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{12} \\ \\ (\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{21} & (\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{22} \end{pmatrix},$$

$$(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{11} = a|W'_{a,b}(b)|\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{Y}}\omega\left(\sqrt{2a^2-2a^2\cos(\phi)}, x_f-y_f,\gamma\right)\cos(l\phi)dy_f d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{12} = b|W'_{a,b}(a)|\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{Y}}\omega\left(\sqrt{a^2+b^2-2ba\cos(\phi)}, x_f-y_f,\gamma\right)\cos(l\phi)dy_f d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{21} = a|W'_{a,b}(b)|\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{Y}}\omega\left(\sqrt{b^2+a^2-2ba\cos(\phi)}, x_f-y_f,\gamma\right)\cos(l\phi)dy_f d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{22} = b|W'_{a,b}(a)|\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{Y}}\omega\left(\sqrt{2b^2-2b^2\cos(\phi)}, x_f-y_f,\gamma\right)\cos(l\phi)dy_f d\phi.$$

Отметим, что при каждом γ, в силу свойств функции ω, оператор $\mathcal{W}_l^\gamma$ является компактным линейным оператором, не обладающим свойством самосопряженности, дискретный спектр которого имеет точку сгущения в начале координат. Принимая во внимание вышеупомянутые предположения о непрерывности функции ω по переменной γ, получаем $\mathcal{W}_l^\gamma(x_f) \to \mathcal{W}_l^0$ при $\gamma \to 0$ для каждого $x \in \mathbb{R}^2$ равностепенно относительно $x_f \in \mathcal{Y}$, где $\mathcal{W}_l^0$ имеет вид

$$\mathcal{W}_l^0 = \mathfrak{M}_{\mathcal{Y}}\begin{pmatrix}(\mathcal{W}_l^0)_{11} & (\mathcal{W}_l^0)_{12}\\ \\ (\mathcal{W}_l^0)_{21} & (\mathcal{W}_l^0)_{22}\end{pmatrix},$$

$$(\mathcal{W}_l^0)_{11} = a|W'_{a,b}(b)|\int_0^{2\pi}\omega\left(\sqrt{2a^2-2a^2\cos(\phi)}, 0, 0\right)\cos(l\phi)d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^0)_{12} = b|W'_{a,b}(a)|\int_0^{2\pi}\omega\left(\sqrt{a^2+b^2-2ba\cos(\phi)}, 0, 0\right)\cos(l\phi)d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^0)_{21} = a|W'_{a,b}(b)|\int_0^{2\pi}\omega\left(\sqrt{b^2+a^2-2ba\cos(\phi)}, 0, 0\right)\cos(l\phi)d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^0)_{22} = b|W'_{a,b}(a)|\int_0^{2\pi}\omega\left(\sqrt{2b^2-2b^2\cos(\phi)}, 0, 0\right)\cos(l\phi)d\phi,$$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{Y}} = \int_{\mathcal{Y}} 1 dy_f.$$

Таким образом, при $\gamma \to 0$ собственные числа $\mu_l^\gamma(x_f)$ и скорости роста/убывания $\lambda_l^\gamma(x_f)$ сходятся равномерно относительно $x_f \in \mathcal{Y}$ к μ_l^0 и λ_l^0, соответственно.

Собственные числа $\mu_l^{0,\pm}$ скорость роста/убывания $\lambda_l^{0,\pm}$, определяются равенствами

$$\mu_l^{0,\pm} = \mathfrak{M}_{\mathcal{Y}}\frac{\operatorname{tr}(\mathcal{W}_l^0) \pm \sqrt{(\operatorname{tr}(\mathcal{W}_l^0))^2 - 4\det(\mathcal{W}_l^0)}}{2}, \qquad \lambda_l^{0,\pm} = \frac{\mu_l^{0,\pm}}{|W'_{a,b}(b)||W'_{a,b}(a)|} - 1$$

Значения $\lambda_l^{0,\pm}$ могут быть использованы в задаче исследования радиальных бегущих волн в коре головного мозга, практическая возможность моделировать которые при помощи уравнений нейронного поля была показана в недавней работе [14] с использованием экспериментальных данных МЭГ. Для заданной функции межнейронной связи ω область допустимых значений переменной порога активации нейронов $h > 0$ включает две подобласти, на первой из которых выполнено неравенство $\max_{l\in\mathbb{Z}}\{\operatorname{Re}(\lambda_l^{0,+}), \operatorname{Re}(\lambda_l^{0,-})\} < 0$, а на второй — $\max_{l\in\mathbb{Z}}\{\operatorname{Re}(\lambda_l^{0,+}), \operatorname{Re}(\lambda_l^{0,-})\} > 0$. В первой подобласти выполнено достаточное условие отсутствия радиально распространяющихся из эпицентра бегущих волн, как в однородной нейронной среде, так и при достаточно слабо выраженной микроструктуре нейронной среды. Во второй подобласти, соответственно, выполнено необходимое условие существования радиально распространяющихся бегущих волн, как в однородной нейронной среде, так и при достаточно слабо выраженной микроструктуре нейронной среды.

Проиллюстрируем полученные в работе результаты при помощи одной из стандартно используемых функций связи ω (см., например, [7, 8, 9, 10, 11]):

$$\omega(x, x_f, \gamma) = \frac{1}{\sigma(x_f)}\chi\left(\frac{x}{\sigma(x_f)}\right), x_f = (x_{f1}, x_{f2})$$

$$\sigma(x_f, \gamma) = 1 + \gamma\cos(x_{f1})\cos(x_{f2}),$$

$$\chi = \frac{1}{2\pi}(\exp(-|x|) - \frac{1}{4}\exp(-\frac{|x|}{2})),$$

где $\mathcal{Y}$ – двумерный единичный тор, $\Gamma = [0, 1]$.

При значениях порога активации $h \in (0.1086, 0.11)$ имеет место сосуществование двух кольцевых решений – «узкого» и «широкого», а при $h = 0.11$ происходит слияние этих решений. На рисунке 1 показаны области существования кольцевых решений в зависимости от значений параметра неоднородности γ и порога активации h для «узкого» и «широкого» колец.

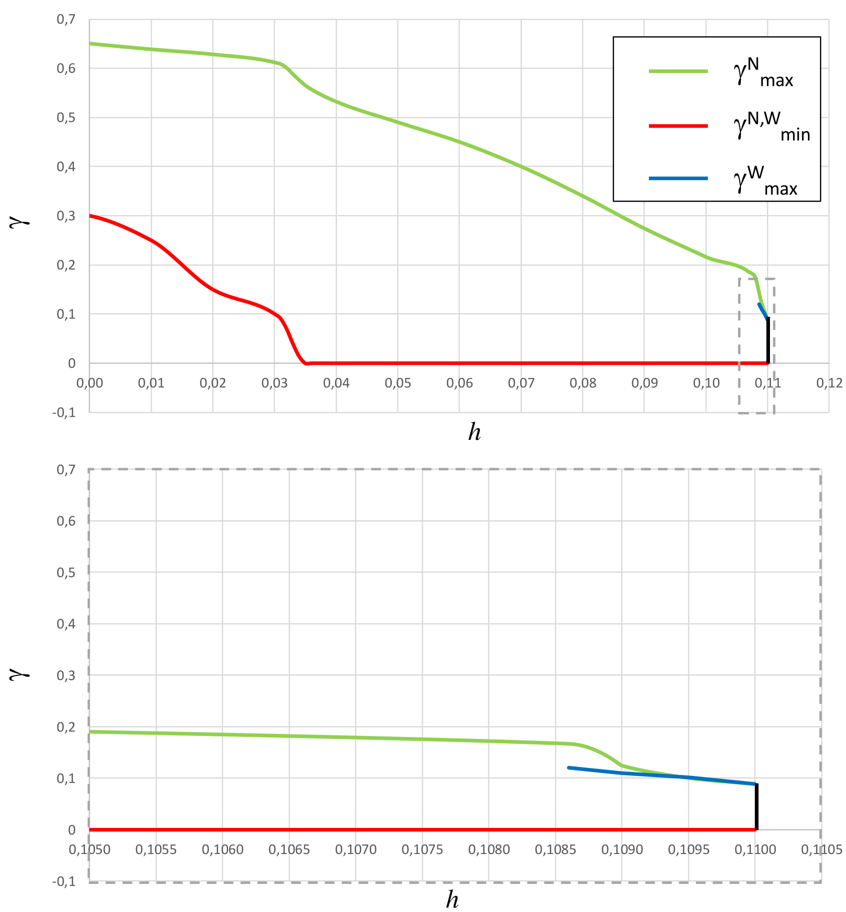

Рис. 1. Области существования кольцевых решений в зависимости от значений параметра неоднородности γ и порога активации h для «узкого» (область, заключенная между зеленой и красной линиями) и «широкого» (область, заключенная между синей и красной линиями) колец.

На рисунке 2 продемонстрирована зависимость внешнего и внутреннего радиусов «узкого» (обозначенных через b_N и a_N, соответственно) и «широкого» (обозначенных через b_W и a_W, соответственно) решений-колец от параметра неоднородности γ и порога активации h. Черными линиями на рисунках 1 и 2 обозначены множества слияния «узкого» и «широкого» решений-колец.

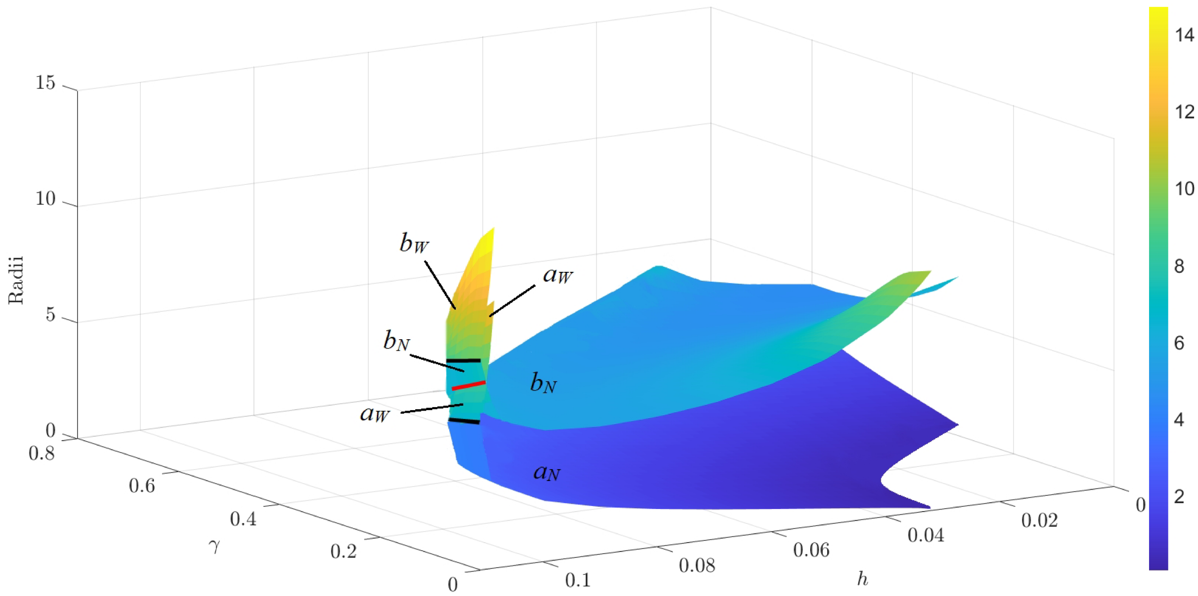

Рис. 2. Зависимость внешнего (b) и внутреннего (a) радиусов кольцевого решения от параметра неоднородности γ и порога активации h. Индексы W и N обозначают «широкую» и «узкую» ветви кольцевого решения, соответственно. Черными линиями обозначены множества слияния «узкого» и «широкого» колец. Красная линия обозначает множество общих точек внутреннего радиуса «широкого» кольца (a_W) с внешним радиусом «узкого» кольца (b_N).

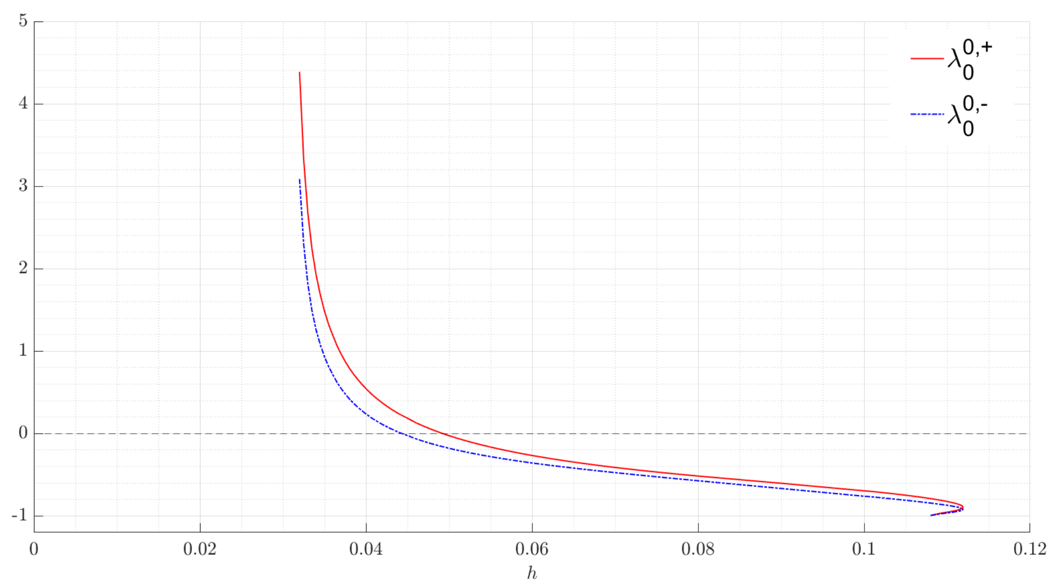

Рис. 3. Зависимость скоростей роста/убывания $\lambda_0^{0,\pm}$ возмущений решений-колец от порога активации h.

Рисунок 3 иллюстрирует зависимость значений скорости роста/убывания $\lambda_0^{0,\pm}$ возмущений решений-колец от порога активации h. Таким образом, «узкое» кольцо неустойчиво при $h \in (0, 0.0493)$, следовательно для порогов активации из указанного интервала выполнено необходимое условие радиального распространения из эпицентра бегущих волн.

References

[1] P. Bressloff, "Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields", *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **45**:3 (2011), 033001.

[2] E. O. Burlakov, T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, N. P. Puchkov, "On continuous and discontinuous models of neural fields", *Journal of Mathematical Sciences*, **259**:3 (2021), 272–282.

[3] S. Amari, "Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields", *Biological Cybernetics*, **27** (1977), 77–87.

[4] S. Kishimoto, S. Amari, "Existence and stability of local excitations in homogeneous neural fields", *Journal of Mathematical Biology*, **7** (1979), 303–318.

[5] C. R. Laing, W. C. Troy, "Two-bump solutions of Amari-type models of neuronal pattern formation", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **178** (2003), 190–218.

[6] K. Kolodina, V. V. Kostrykin, A. Oleynik, "Existence and stability of periodic solutions in a neural field equation", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:135 (2021), 271–295.

[7] S. Coombes, "Waves, bumps, and patterns in neural field theories", *Biological Cybernetics*, **93** (2005), 91–108.

[8] M. R. Owen, C. R. Laing, S. Coombes, "Bumps and rings in a two-dimensional neural field: splitting and rotational instabilities", *New Journal of Physics*, **9** (2007), 378.

[9] N. Svanstedt, J. Wyller, E. Malyutina, "A one-population Amari model with periodic microstructure", *Nonlinearity*, **27** (2014), 1391–1417.

[10] E. Malyutina, J. Wyller, A. Ponosov, "Two bumps solutions of a homogenized Wilson-Cowan model with periodic microstructure", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **271** (2014), 19–31.

[11] E. Burlakov, J. Wyller, A. Ponosov, "Two-dimensional Amari neural field model with periodic microstructure: Rotationally symmetric bump solutions", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **32** (2016), 81–88.

[12] Е. О. Бурлаков, И. Н. Мальков, "О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: II. Радиально симметричные стационарные решения в 2D («бампы»)", *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 6–17. [E. O. Burlakov, I. N. Malkov, "On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure: II. Radially symmetric stationary solutions in 2D ("bumps")", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 6–17 (In Russian)].

[13] J. A. Murdock, F. Botelho, J. E. Jamison, "Persistence of spatial patterns produced by neural field equations", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **215** (2006), 106–116.

[14] E. Burlakov, V. Verkhlyutov, V. Ushakov, "A simple human brain model reproducing evoked MEG based on neural field theory", *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research V*, Studies in Computational Intelligence, **1008**, ed. B. Kryzhanovsky, W. Dunin–Barkowski, V. Redko, Y. Tiumentsev, 2021, 109–116.

Информация об авторах

Атмания Рашид, аспирант, институт математики и компьютерных наук. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: atmania.rachid@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2194-1497

Information about the authors

Rachid Atmania, Post-Graduate Student, Institute of Mathematics and Computer Science. Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: atmania.rachid@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2194-1497

Бурлаков Евгений Олегович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник института X-Bio. Тюменский государственный университет, г. Тюмень; научный сотрудник научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования», Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Evgenii O. Burlakov, PhD, Senior Researcher at X-Bio Institute. Tyumen State University, Tyumen; Researcher at the Research and Educational Center “Fundamental Mathematical Research”, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Мальков Иван Николаевич, аспирант, институт математики и компьютерных наук. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Ivan N. Malkov, Post-Graduate Student, Institute of Mathematics and Computer Science. Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Бурлаков Евгений Олегович
E-mail: eb_@bk.ru

Corresponding author:
Evgenii O. Burlakov
E-mail: eb_@bk.ru

Поступила в редакцию 23.08.2022 г.
Поступила после рецензирования 26.10.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Received 23.08.2022
Reviewed 26.10.2022
Accepted for press 24.11.2022